Théorème :

Soit I un intervalle non singulier et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante.
1) $f(I)$ est un intervalle de même type que I et dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I.
2) f réalise une bijective de I sur $f(I)$.
3) L'application réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et de même monotonie que I.

Démonstration :

1) Notons $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ les extrémités de I.

Cas $I =]a,b[$:

Comme f est croissante : $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{b} f$ existent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

De plus $\forall x \in]a,b[, \lim\limits_{a} f \leq f(x) \leq \lim\limits_{b} f$ car $\lim\limits_{a} f = \inf\limits_{]a,b[} f$ et $\lim\limits_{b} f = \sup\limits_{]a,b[} f$.

De plus, ces inégalités sont nécessairement strictes, car sinon x serait un extremum de f ce qui est impossible puisque f est strictement croissante.

Ainsi $\left]\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{b} f\right[\supset f(]a,b[)$.

Inversement :

Soit $y \in \left]\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{b} f\right[$.

$\exists x_1, x_2 \in]a,b[$ tels que $f(x_1) < y < f(x_2)$.

En appliquant le TVI sur $[x_1, x_2]$: $\exists x \in [x_1, x_2] \subset]a,b[$ tel que $y = f(x)$.

Finalement $f(]a,b[) = \left]\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{b} f\right[$.

Si $I =]a,b]$, sachant que la continuité de f impose $\lim\limits_{b} f = f(b)$ on a :

$$f(I) = f(]a,b[\cup \{b\}) = f(]a,b[) \cup \{f(b)\} = \left]\lim_{a} f, \lim_{b} f\right[\cup \{f(b)\} = \left]\lim_{a} f, f(b)\right].$$

Par la même démarche, lorsque $I = [a,b[$ et $I = [a,b]$ on a respectivement : $f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{b} f\right[$ et $f(I) = [f(a), f(b)]$.

2) f est strictement croissante donc injective.

Par suite f réalise une bijective de I sur $f(I)$.

3) f^{-1} est strictement croissante car application réciproque d'une fonction qu'il l'est.

Montrons que f^{-1} est continue.

Soit y_0 un point intérieur à $f(I)$.

Comme f^{-1} est croissante : $\lim\limits_{y_0^-} f^{-1}$ et $\lim\limits_{y_0^+} f^{-1}$ existent et $\lim\limits_{y_0^-} f^{-1} \leq f^{-1}(y_0) \leq \lim\limits_{y_0^+} f^{-1}$.

Quand $y \to y_0$ on a $f(f^{-1}(y)) = y \to y_0$.

Quand $y \to y_0^+$ on a $f^{-1}(y) \to \lim\limits_{y_0^+} f^{-1}$, puis par composition de limites : $f(f^{-1}(y)) \to f(\lim\limits_{y_0^+} f^{-1})$.

Par unicité de la limite : $f(\lim\limits_{y_0^+} f^{-1}) = y_0$ puis $\lim\limits_{y_0^+} f^{-1} = f^{-1}(y_0)$.

De même : $\lim\limits_{y_0^-} f^{-1} = f^{-1}(y_0)$ et finalement f^{-1} est continue en y_0.

L'étude en un point y_0 extrémité de $f(I)$ est similaire.

Finalement f^{-1} est une fonction continue.